17avril 2007 Nom:
10h30–12h20

HST-10393 Examen 2

1. (10 points) À quel mathématicien associez-vous les réalisations suivantes?

   (a) Il a été le premier à donner une preuve correcte du théorème fondamental de l'algèbre.

   Réponse:

   (b) Il a démontré l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation algébrique générale de degré 5.

   Réponse:

   (c) Il a établi quelles équations algèbriques de degré ≥ 5 peuvent être résolues par radicaux.

   Réponse:

   (d) Il a démontré la loi de la réciprocité quadratique.

   Réponse:

   (e) On lui doit la formule $S + F - A = 2$ qui relie le nombre de sommets (S), faces (F) et arètes (A) d'un polyèdre.

   Réponse:

2. (10+10+10=30 points)

   (a) Énoncer les trois lois de Kepler.

   (b) Est-il vrai que si les $f_n(x)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0, 1]$, alors la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $[0, 1]$? Si oui, indiquez à qui on doit ce théorème, et sinon indiquez quelle(s) hypothèse(s) il faut ajouter pour obtenir la conclusion, en mentionnant à qui on doit ce résultat.

(c) En 1696 Jean Bernoulli pose le problème du brachistochrone. En quoi consiste ce problème? Quelle est la solution? Nommez au moins trois mathématiciens de l'époque qui ont résolu le problème, en indiquant pour l'un d'eux les principes de sa solution.

3. (20 points) Utiliser la méthode de Descartes pour calculer la normale à la courbe d'équation

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

au point $(\sqrt{2}, 2)$.

4. (20 points) En partant de l'approximation première $y = 2$ qui est une solution pour $x = 0$, trouver, à la manière de Newton, le développement en série de puissances de x d'une solution y de l'équation

$$y^3 + xy - y - 6 = 0$$

au voisinage de $x = 0$. On calculera jusqu'au terme en x^2 inclusivement.

5. (20 points) Calculer à la manière d'Euler la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$